※設置認可申請中

大阪公立大学（仮称）一般選抜　個別学力検査等

公立大学中期日程　数学　（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ａ・数学Ｂ）

「解答例」

略解

第１問　(1)　$P_1 = \dfrac{129}{143}$　(2)　$P_2 = \dfrac{73}{143}$　(3)　$P_3 = \dfrac{55}{129}$

第２問　(1)　$\mathrm{OE} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{1}{3}$　(2)　$\dfrac{\sqrt{19}}{18}$　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$

第３問　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{3\sqrt{3}}{26}$　(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} U_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (p = 2) \\ 0 & (p \neq 2) \end{cases}$

第４問　(1)　$\ell_1 : y = \dfrac{1}{t}x + \log t - 1$,　$\ell_2 : y = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}}x + \dfrac{\sqrt{as}}{2}$　(2)　$a > \dfrac{4}{e^2}$

第５問　(1)　$f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2(1-x^2)}}$　(2)　$\dfrac{\pi}{4\alpha}$　(3)　$\pi\left\{\dfrac{3}{2\sqrt{2}} - \dfrac{\pi}{4\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\right\}$

第1問

くじを引く順序によって当たる確率は変わらないので, A, B, C, D がくじを引く順序は考えなくてよい. 4 人のくじの引き方の総数は ${}_{13}\mathrm{C}_4$ 通り

(1) 余事象は 4 人がすべてはずれることであり, ${}_{8}\mathrm{C}_4$ 通り. よって, 求める確率は

$$P_1 = 1 - \frac{{}_{8}\mathrm{C}_4}{{}_{13}\mathrm{C}_4} = 1 - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10} = \boxed{\frac{129}{143}}$$

(2) 余事象は 4 人がすべてはずれるか, または 1 人のみ当たることである.
1 人のみ当たるのは, 当たり 5 本から 1 本, はずれ 8 本から 3 本引くことであり, ${}_{5}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{8}\mathrm{C}_3$ 通り. よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} P_2 &= 1 - \frac{{}_{8}\mathrm{C}_4 + {}_{5}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{8}\mathrm{C}_3}{{}_{13}\mathrm{C}_4} = P_1 - \frac{{}_{5}\mathrm{C}_1 \cdot {}_{8}\mathrm{C}_3}{{}_{13}\mathrm{C}_4} \\ &= P_1 - \frac{5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{129}{143} - \frac{56}{143} = \boxed{\frac{73}{143}} \end{aligned}$$

(3) 4 人のうち少なくとも 1 人が当たりくじを引く事象を X とし, D が当たる事象を Y とすると

$$P(X) = P_1 = \frac{129}{143}, \quad P(X \cap Y) = P(Y) = \frac{5}{13}$$

よって, 求める条件つき確率 P_3 は

$$P_3 = P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{5}{13} \cdot \frac{143}{129} = \boxed{\frac{55}{129}}$$

第2問

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと, 条件より

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$ であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right|^2=\frac{|\vec{b}|^2+4\vec{b}\cdot\vec{c}+4|\vec{c}|^2}{9}=\frac{7}{9}\qquad\therefore\ \boxed{\mathrm{OE}=\frac{\sqrt{7}}{3}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}\right)=\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\cdot\vec{c}}{9}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

(2) 三角形 ODE の面積を S とすると, (1) の結果より

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\boxed{\frac{\sqrt{19}}{18}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ (k は実数) とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

条件より $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$, すなわち $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=0$ であるから, (1) の結果より

$$\left(k\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\left|\overrightarrow{\mathrm{OE}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{7}{9}k-\frac{1}{3}=0$$

これより $k=\dfrac{3}{7}\quad\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\boxed{\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OE}}}$

第3問

(1)
$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\} \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \boxed{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \sin\frac{2k\pi}{3} \\
&= \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3^2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3^3}\cdot 0 + \frac{1}{3^4}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3^5}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3^6}\cdot 0 \\
&\qquad\qquad + \cdots + \frac{1}{3^{3n-2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3^{3n-1}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3^{3n}}\cdot 0 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{3n-2}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{1}{3^{3n-1}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}(9-3)\left(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{3n}}\right) = 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3^3}\right)^n}{1-\frac{1}{3^3}} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{26}\left(1-\frac{1}{27^n}\right) \qquad \therefore\ \lim_{n\to\infty} T_n = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{26}}
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(p\pi\frac{k}{n}\right)\sin\left(2\pi\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \sin(p\pi x)\sin(2\pi x)\,dx \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{2}\{\cos(p+2)\pi x - \cos(p-2)\pi x\}dx
\end{aligned}
$$

$p \neq 2$ のとき

$$
\lim_{n\to\infty} U_n = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p+2)\pi}\sin(p+2)\pi x - \frac{1}{(p-2)\pi}\sin(p-2)\pi x\right]_0^1 = \boxed{0}
$$

$p = 2$ のとき

$$
\lim_{n\to\infty} U_n = \int_0^1 -\frac{1}{2}(\cos 4\pi x - 1)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi}\sin 4\pi x - x\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}
$$

第4問

(1) $y = \log x$ より $y' = \dfrac{1}{x}$ であるから, $y = \log x$ 上の点 $(t, \log t)$ $(t > 0)$ での接線の方程式 ℓ_1 は

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t) \qquad \therefore\ \ell_1 : \boxed{y = \frac{1}{t}x + \log t - 1}$$

また $y = \sqrt{ax}$ より $y' = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}$ であるから, $y = \sqrt{ax}$ 上の点 $(s, \sqrt{as})$ $(s > 0)$ での接線の方程式 ℓ_2 は

$$y - \sqrt{as} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}}(x - s) \qquad \therefore\ \ell_2 : \boxed{y = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}}x + \frac{\sqrt{as}}{2}}$$

(2) 求める条件は，ℓ_1 と ℓ_2 が一致する正の数 s, t が存在しないこと，すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t} = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{s}} & \text{——— ①} \\ \log t - 1 = \dfrac{\sqrt{as}}{2} & \text{——— ②} \end{cases}$$

を満たす正の数 s, t が存在しないことである．① より $\sqrt{s} = \dfrac{\sqrt{a}}{2}t$ これを ② に代入すると, $\log t - 1 = \dfrac{at}{4}$ より

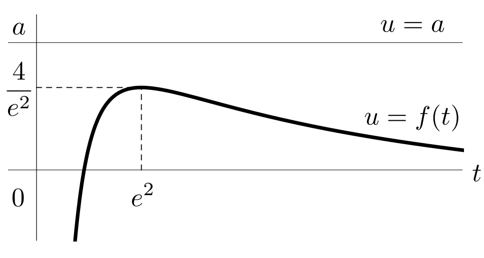
$$\frac{4(\log t - 1)}{t} = a \qquad \text{——— ③}$$

$f(t) = \dfrac{4(\log t - 1)}{t}$ とおくと

$$f'(t) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{t} \cdot t - (\log t - 1) \cdot 1}{t^2} = \frac{4(2 - \log t)}{t^2}$$

$f'(t) = 0$ とすると，$\log t = 2$ より $t = e^2$

t	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$



求める条件は，③ を満たす正の数 t が存在しないこと，すなわち $u = f(t)$ と $u = a$ のグラフが共有点をもたないことであるから，$\boxed{a > \dfrac{4}{e^2}}$

第5問

(1) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{1+2x^2})^{3/2}} > 0$ かつ $f(0)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ より $0 \leqq f(x) < 1$

このとき, $y = \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+2x^2}}$ を x について解くと, $x = \dfrac{y}{\sqrt{2(1-y^2)}}$ $(0 \leqq y < 1)$

ゆえに, $f^{-1}(x) = \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{2(1-x^2)}}}$ $(0 \leqq x < 1)$

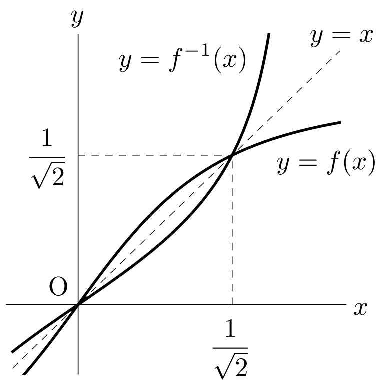
(2) $x = \alpha\tan\theta$ とおくと, $dx = \dfrac{\alpha}{\cos^2\theta}d\theta$ かつ $x : 0 \to \alpha \iff \theta : 0 \to \dfrac{\pi}{4}$ より

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{1}{x^2+\alpha^2}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\alpha^2(\tan^2\theta+1)} \cdot \frac{\alpha}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\pi/4} d\theta = \boxed{\frac{\pi}{4\alpha}}$$

(3) 2 曲線 $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ の交点の x 座標を求めると, $x=0$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって, 2 曲線の概形は右図のようになる. 求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{1/\sqrt{2}} \{f(x)\}^2 dx - \pi\int_0^{1/\sqrt{2}} \{f^{-1}(x)\}^2 dx \\
&= \pi\int_0^{1/\sqrt{2}} \left\{\frac{2x^2}{1+2x^2} - \frac{x^2}{2(1-x^2)}\right\} dx \\
&= \pi\int_0^{1/\sqrt{2}} \left\{\frac{2x^2+1-1}{2x^2+1} + \frac{1-x^2-1}{2(1-x^2)}\right\} dx \\
&= \pi\int_0^{1/\sqrt{2}} \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2(x^2+1/2)} - \frac{1}{2(1-x^2)}\right\} dx
\end{aligned}$$



ここで, (2) の結果より

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}dx = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

また

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1-x^2}dx &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| = \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2 = \log(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

よって

$$V = \boxed{\pi\left\{\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\right\}}$$